

Folha 7b

Campo electromagnético e a sua interacção com matéria

1. Considere comutação dos operadores de campo.

a) Partindo das relações canónicas de comutação para os operadores de segunda quantificação $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$, calcule

$$\left[\hat{A}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{A}_\nu(\mathbf{r}', t') \right] \quad \text{onde } \mu, \nu = 1, 2, 3.$$

b) Construindo o operador de detecção de fotões

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \lambda_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

e o seu adjunto $\hat{\mathbf{D}}^\dagger(\mathbf{r}, t)$, calcule os comutadores

$$\left[\hat{D}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{D}_\nu^\dagger(\mathbf{r}', t') \right], \quad \left[\hat{D}_\mu^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{D}_\nu(\mathbf{r}', t') \right], \quad \left[\hat{D}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{D}_\nu(\mathbf{r}', t') \right].$$

c) Expressando os campos eléctrico $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -c^{-1} \partial \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) / \partial t$ e magnético $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, mostre que

$$\left[\hat{E}_x(\mathbf{r}, t), \hat{B}_y^\dagger(\mathbf{r}', t) \right] = 2i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

2. Considere a transição $2p \rightarrow 1s$ no átomo de hidrogénio na aproximação do momento eléctrico dipolar (o problema 5.2b).

a) Calcule a vida média do estado $2p$ nesta aproximação $\tau_{2p} = 1/\Gamma_{2p \rightarrow 1s, esp}$.

(A resposta: $\tau_{2p} = (9/4\alpha)^4 a_B/c \approx 1.6 \cdot 10^{-9} s$, sendo $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ a constante de estrutura fina.)

b) Reconsidere o cálculo anterior levando agora em conta o desdobramento dos níveis $2p$ provocado pela interacção spin-órbita $A_{s-o} \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$.

i) Mostre que a taxa de transição $P_{3/2} \rightarrow S_{1/2}$ é dupla da taxa $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$.

ii) Calcule a vida média dos estados $2p$ desprezando a separação dos níveis P (em face de diferença de energias $2p \rightarrow 1s$).

3. Efeito fotoeléctrico. Considere o átomo de hidrogénio no estado fundamental. Para fotões incidentes de energia elevada é legítimo representar o electrão arrancado por uma onda plana. Suponha um dado estado de polarização dos fotões. Usando a aproximação dipolar, calcule a secção eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$ para efeito fotoeléctrico.