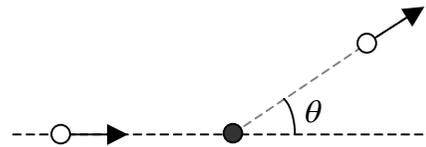


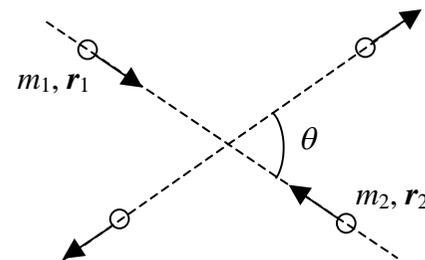
3. Teoria quântica de difusão

No curso anterior considerávamos simetrias *exactas* e estados *exactos* dos Hamiltonianos. Mas na realidade sempre se encontram certas perturbações dos sistemas exactos. Um dos casos mais importantes deste tipo corresponde a difusão das partículas (inicialmente livres). Geralmente, distinguem-se dois casos principais de difusão:

1) Difusão de 1 partícula num centro de potencial



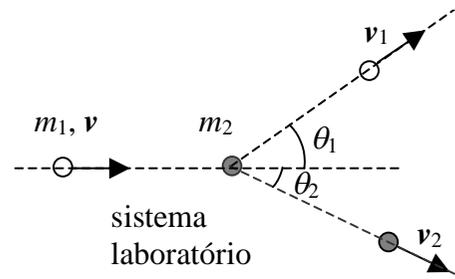
2) Colisão das 2 partículas



O último caso sempre pode ser reduzido ao anterior, passando do sistema de laboratório ao sistema de centro de massa, com origem em

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Em particular, para colisão com uma partícula imóvel:



as leis de conservação de grupo de Galileo:

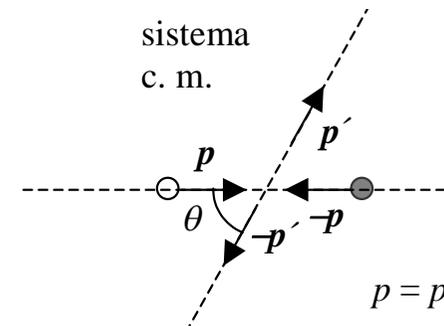
$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2,$$

$$m_1 \mathbf{v} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2.$$

energia
impulso

Em sistema de c.m. temos:

$$m_1 \mathbf{v} \rightarrow m_1 (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{R}}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} = \overset{\text{massa reduzida}}{\mu} \mathbf{v} = \mathbf{p}$$



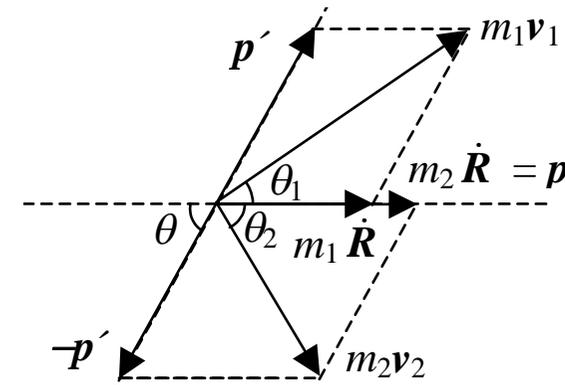
As relações entre os ângulos de difusão em sistemas c.m. (θ) e laboratório (θ_1, θ_2) resultam desde análise de indicado paralelepípedo :

$$p \cos \theta = m_1 \left(v_1 \cos \theta_1 - \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \right),$$

$$p \sin \theta = m_1 v_1 \sin \theta_1,$$

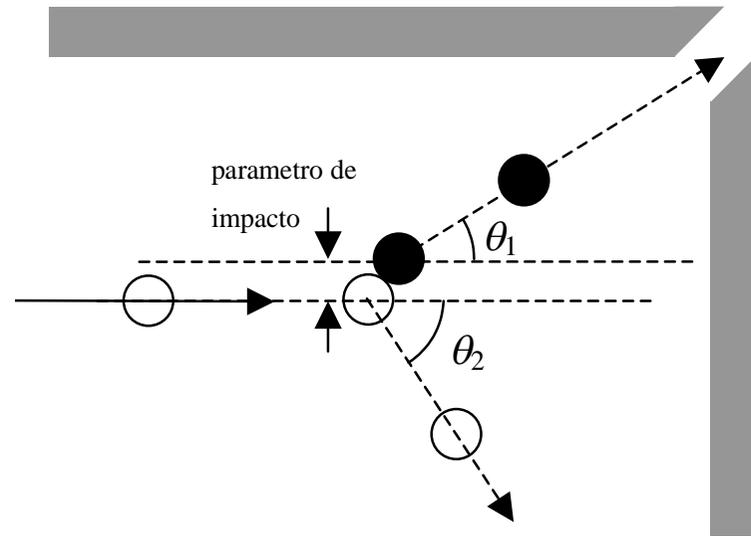
portanto obtemos:

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2 \cos \theta}, \quad \text{e} \quad \theta_2 = (\pi - \theta) / 2.$$

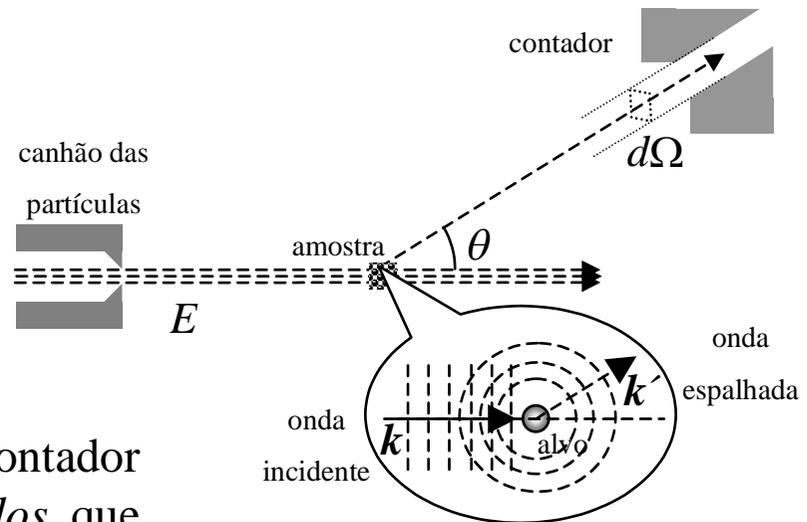


No caso particular das massas idênticas ($m_1 = m_2$) as partículas ficam espalhadas por ângulo recto: $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, e além disso temos $\theta_1 = \theta/2$.

O exemplo clássico de difusão em vida quotidiana está dado por bilhar:



Em física a situação semelhante realiza-se no experimento de difusão:



As partículas contadas pelo contador pertencem aos estados livres *espalhados* que são autoestados de potencial central $V(r)$ com energia inicial E (processo elástico).

A equação de Schroedinger correspondente:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}),$$

descomponha-se em partes radial e angular:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 \psi) + V(r) \psi \right] + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\hat{l}^2}{r^2} \psi \right) = E \psi$$

Os seus autoestados (fora de acção de potencial: $V(r) = 0$), classificados segundo valores de energia e momento angular, apresentam-se como:

$$\psi_{E,l,m}(\mathbf{r}) \propto j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

onde $k = \sqrt{2mE}$, e $j_l(x) = J_{l+1/2}(x)$ são as chamadas funções esféricas de Bessel, as soluções de:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right) j_l(kr) = 0$$

valor próprio de $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

As soluções assintóticas desta equação para $r \rightarrow \infty$ podem ser escritas em forma geral:

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \underbrace{e^{ikr}}_{\text{onda incidente}} + \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r} f_k(\theta)}_{\text{onda espalhada}}$$

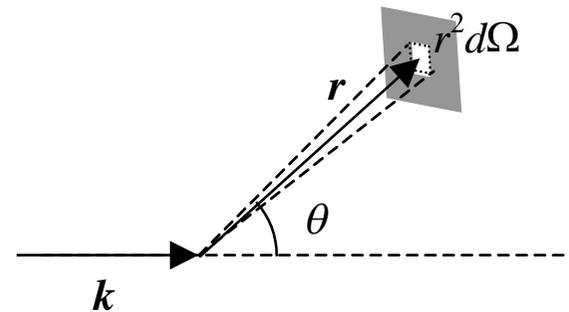
← amplitude de espalhamento por ângulo θ

Secção efectiva de difusão define-se como *número de partículas contadas em unidade de tempo pelo contador sob ângulo θ* , assim a secção diferencial sendo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2$$

e a secção total:

$$\sigma = \int |f_k(\theta)|^2 d\Omega$$



← ambas dependem ainda de k
(de energia incidente)

O estado inicial também pode descompor-se em autoestados de momento angular:

$$e^{ikr} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos\theta) j_l(kr)$$

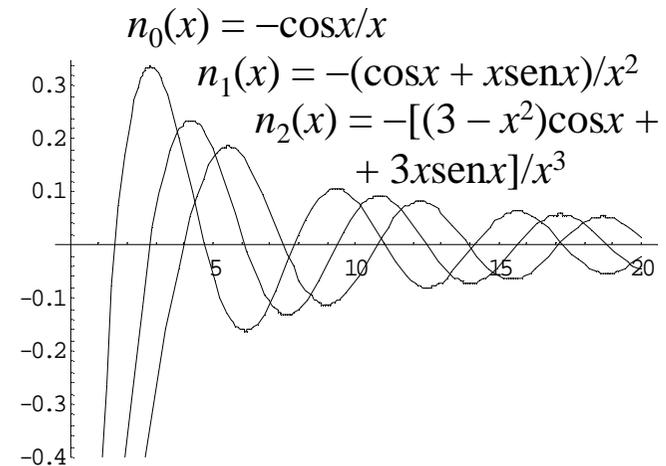
(supondo \mathbf{k} orientado segundo eixo z , temos só projecção $m = 0$ para cada l)
quando o estado final *exacto* escreve-se como:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos\theta) R_l(r)$$

e o problema de difusão reduz-se a definição de comportamento assintótico das funções radiais escritas em forma:

$$R_l(r) \rightarrow [h_l^*(kr) + \exp(2i\delta_l) h_l(kr)],$$

onde $h_l(x) = j_l(x) + in_l(x)$, a função esférica de Hankel, e δ_l chama-se a fase parcial de difusão.



Em termos das fases δ_l a amplitude apresenta-se como:

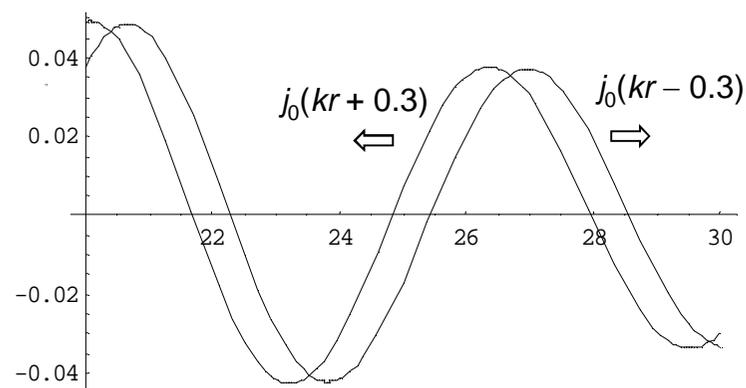
$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \text{sen } \delta_l$$

$\frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i}$

e, depois de levantar o seu modulo ao quadrado e fazer integração angular com a conta de ortogonalidade dos polinómios de Legendre, temos a secção total de difusão como:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l$$

a soma das secções parciais. Analizando comportamento assintótico das funções $R_l(r) \propto \exp(i\delta_l) j_l(kr + \delta_l)$, concluímos que sinal positivo da fase: $\delta_l > 0$, corresponde à atracção de onda por potencial $V(r)$, quando negativa $\delta_l < 0$, corresponde a sua repulsão.



Relação entre potencial de espalhamento e amplitude de difusão

Pela razão de linearidade da equação de Schroedinger, as suas soluções para qualquer potencial $V(\mathbf{r})$ podem ser obtidas com uso das funções de Green:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + E_k + i0 \right) G_k(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}).$$

função de Green (f.G.) para energia
 $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ mais uma infinitesimal
parte imaginária

A f.G. obteve-se através da sua transformada de Fourier:

$$G_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} g_k(\mathbf{p}),$$

para que temos uma equação *algébrica*:

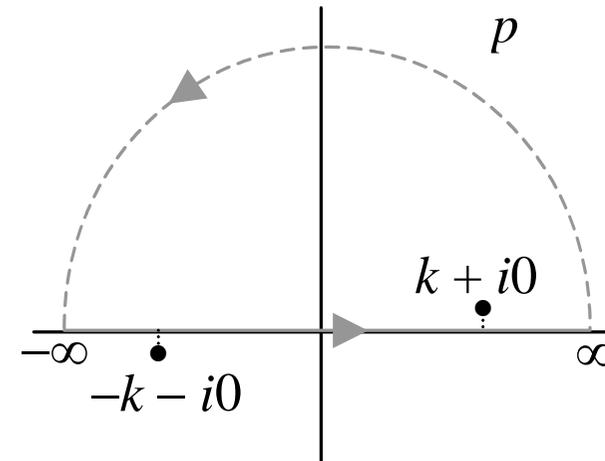
$$\left(\frac{\hbar^2 p^2}{2m} - E_k - i0 \right) g_k(\mathbf{p}) = 1,$$

transformada de
Fourier de $\delta(\mathbf{r})$

$$g_k(p) = \frac{2m/\hbar^2}{p^2 - k^2 - i0}.$$



$$\begin{aligned} G_k(\mathbf{r}) &= \frac{2m}{(2\pi)^3 \hbar^2} \int dp \frac{e^{ipr}}{p^2 - k^2 - i0} = \\ &= \frac{m}{4\pi^2 \hbar^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p e^{ipr} dp}{p^2 - k^2 - i0} = \frac{m e^{ikr}}{2\pi \hbar^2 r}. \end{aligned}$$



após de fazer a integração angular usamos para integração em p este contorno no plano complexo

A solução geral de equação Schroedinger, apresenta-se como:

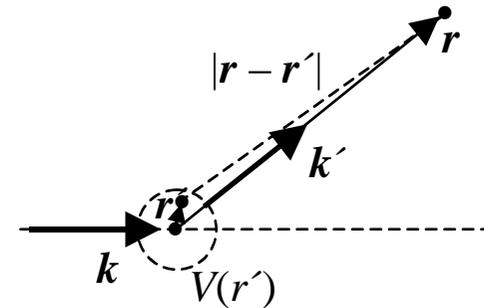
$$\begin{aligned} \psi_k(\mathbf{r}) &= e^{ikr} + \int d\mathbf{r}' G_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_k(\mathbf{r}') = \\ &= e^{ikr} - \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi_k(\mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Para ponto de observação (de contador) assintoticamente afastado comparando com a extensão espacial de potencial de difusão: $r \gg r'$, temos

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r}' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ikr} e^{-ik'\mathbf{r}'}, \quad \mathbf{k}' = k \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r},$$



e portanto:

$$\psi_k(\mathbf{r}) \approx e^{ikr} + \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r} \left[-\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{ik'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi_k(\mathbf{r}') \right]}_{\text{amplitude de difusão } f_k(\theta)}$$

Se de algum modo esta conhecida a solução $\psi_k(\mathbf{r})$ de Eq. Schroedinger para energia E_k , podemos daqui calcular a amplitude $f_k(\theta)$.

Aproximação de Born

Substituímos para a expressão anterior de amplitude:

$$f_k(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{ik'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi_k(\mathbf{r}')$$

as expansões de $e^{ik'\mathbf{r}'}$ e $\psi_k(\mathbf{r}')$ em harmónicos esféricos e fazemos integração angular com a conta de ortogonalidade de polinómios de Legendre:

$$f_k(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) \int_0^\infty r^2 V(r) j_l(kr) R_l(kr) dr$$

Comparando esta equação com a definição anterior, concluimos que:

$$e^{i\delta_l} \sin\delta_l = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 V(r) j_l(kr) R_l(kr) dr$$

Para difusão fraca ($|\delta_l| \ll 1$) podemos expandir a parte de esquerda até 1ª ordem em δ_l e substituir na parte de direita a solução exacta R_l pela solução livre j_l . Assim chegamos à aproximação de Born para fase:

$$\delta_l = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty r^2 V(r) j_l^2(kr) dr$$

Para potencial suficientemente fraco ($|V| \ll E_k$) podemos também substituir $\psi_k(\mathbf{r}')$ $\rightarrow e^{ik'r'}$, obtendo (1ª) aproximação de Born para amplitude:

$$f_k(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{i(k-k')r'} V(\mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} v_{q=k-k'}$$

transformada de Fourier
(se existe)

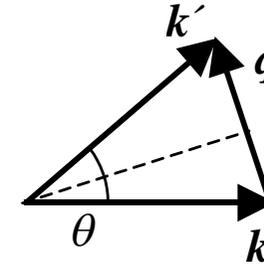
impulso transferido

Exemplo.

Potencial de Yukawa:

$$V(r) = \frac{ae^{-Kr}}{r}, \quad \implies \quad v_q = \frac{4\pi a}{q^2 + K^2}$$

Expressando o impulso transferido a custa de ângulo de difusão $q = 2k \sin \theta/2$, obtemos a secção diferencial:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{\left(4E_k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\hbar^2 K^2}{2m}\right)^2}$$

Formalmente pondo aqui $a = e^2$ e passando ao limite $K \rightarrow 0$, recuperamos a formula clássica de Rutherford para difusão por um centro carregado, embora rigorosamente a aproximação de Born não é valida para este limite, quando o potencial Yukawa de corto alcance passa para potencial de Coulomb.

Teorema óptico

Consideremos a parte imaginária da amplitude de difusão:

$$\text{Im}f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \text{sen}^2 \delta_l$$

e passamos para o caso particular de difusão para frente ($\theta = 0$):

$$\text{Im}f_k(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l$$

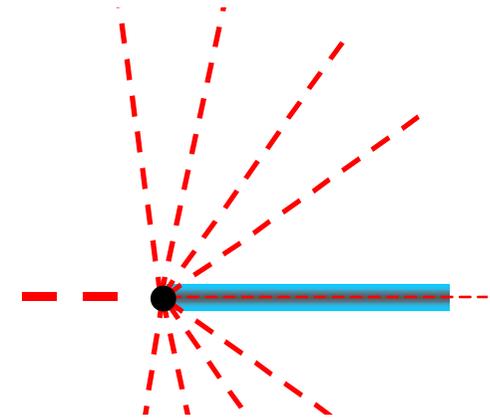
Verifica-se que esta expressão tem a mesma estrutura que a secção total:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l$$

Assim concluímos que

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f_k(0),$$

o que constitui o chamado teorema óptico. O seu significado físico corresponde à conservação de número total de partículas no processo de difusão, sendo o número total das partículas espalhadas desde o feixe incidente igual a “défice” das partículas no feixe final.

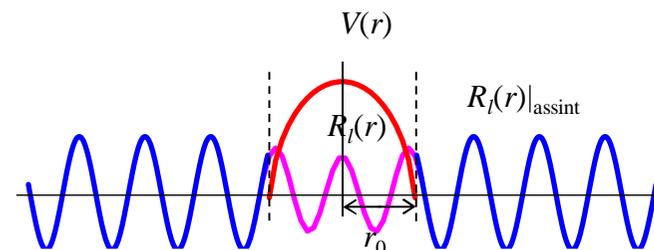


interferência entre o estado incidente e^{ikr} e o espalhado $e^{ikr}f_k(\theta)/r$ produz a “sombra” em frente do alvo

Propriedades analíticas de amplitude e fases de difusão

Consideramos o caso de potencial finito:

$$V(r) \equiv 0, \quad r > r_0.$$



As soluções de eq. de Schroedinger radial:

$$R_l(r)|_{\text{assint}} = [h_l^*(kr) + \exp(2i\delta_l)h_l(kr)]/2,$$

devem ligar-se continuamente em $r = r_0$ com a função *exacta* $R_l(r)$ para $r < r_0$. Comparando as derivadas logarítmicas destas funções em r_0 , temos:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r} [h_l^*(kr) + e^{2i\delta_l} h_l(kr)]}{h_l^*(kr) + e^{2i\delta_l} h_l(kr)} \Big|_{r=r_0} = \alpha_l = \frac{\frac{\partial R_l(r)}{\partial r}}{R_l(r)} \Big|_{r=r_0}$$

único valor que depende do potencial $V(r)$

e a 1ª igualdade implica a relação para a fase:

$$\cot\delta_l = \left. \frac{\frac{\partial n_l}{\partial r} - \alpha_l n_l}{\frac{\partial j_l}{\partial r} - \alpha_l j_l} \right|_{r=r_0}$$

Esta equação dá o modo prático de calcular as fases de difusão

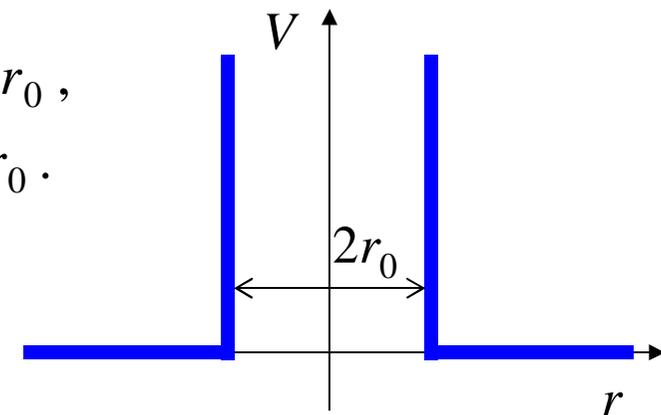
Exemplo: esfera dura,

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases}$$

Neste caso $R_l(r) \equiv 0$ para $r < r_0$, portanto $\alpha_l \rightarrow \infty$, e a equação de fase torna-se simplesmente:

$$\cot\delta_l = \frac{n_l(kr_0)}{j_l(kr_0)}$$

Em particular, para onda s temos: $\delta_0 = -kr_0$, este valor negativo confirma carácter repulsivo de potencial considerado.



Para o caso geral analisa simplifica-se no limite de energias baixas $kr_0 \ll 1$. Aqui as expansões de $n_l(x)$ e $j_l(x)$ para $x \rightarrow 0$ permitem definir desde eq. de fase o termo dominante (com respeito a kr_0) para cada fase:

$$\cot \delta_l \approx (2l+1)!!(2l-1)!! \frac{l+1+r_0\alpha_l}{l-r_0\alpha_l} (kr_0)^{-2l-1}$$

que indica a proporcionalidade $\sin \delta_l \sim k^{2l+1}$. Em limite $k \rightarrow 0$ “sobrevive” só a contribuição de onda s:

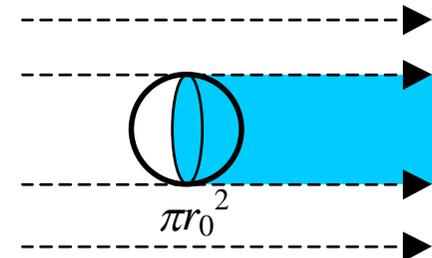
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2}$$

não depende de θ ,
difusão isotrópica

Para o exemplo anterior de esfera dura esta contribuição para secção total é:

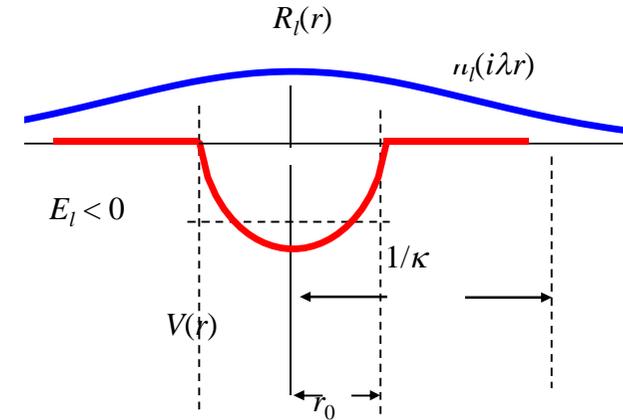
$$\sigma = 4\pi r_0^2$$

4 vezes a secção clássica de esfera.



Caso de potencial atrativo

Neste caso é possível formação do estado ligado, assim que a sua função de onda pode ser escolhida *real* e desaparece no infinito. Portanto eq. de fronteira para o estado ligado de momento angular l e de energia $E_l < 0$ escreve-se como:



$$\left. \frac{\frac{\partial h_l(i\lambda r)}{\partial r}}{h_l(i\lambda r)} \right|_{r=r_0} = \alpha_l(E_l) \xrightarrow{h_l = j_l + in_l} \left(\frac{\partial n_l}{\partial r} - \alpha_l n_l \right)_{r=r_0} = i \left(\frac{\partial j_l}{\partial r} - \alpha_l j_l \right)_{r=r_0}$$

implicando, desde a eq. de fase a igualdade:

$$\cot \delta_l(E_l) = i.$$

Esta equação significa que a correspondente amplitude de espalhamento:

$$e^{2i\delta_l(E)} - 1 = -\frac{2i}{\cot\delta_l(E) - i}$$

considerada como função da energia complexa E , tem um *polo* no ponto $E = E_l$, comportando-se na sua vizinhança como:

$$e^{2i\delta_l} - 1 \approx \left(\frac{\text{sen}^2 \delta_l}{\partial \delta_l / \partial E} \right)_{E=E_l} \frac{2i}{E_l - E} \rightarrow \infty$$

O próprio valor de energia E_l para nível pouco profundo ($\lambda r_0 \ll 1$) está dado pela equação:

$$l + 1 + r_0 \alpha_l(E_l) = 0 \quad (\text{N})$$

definida pelo mais importante termo na Eq. de fronteira neste limite, $n_l(x) \approx (2l - 1)!! x^{-l-1}$.

Para energias positivas mas baixas ($kr_0 \ll 1$), eq. de estado estacionário sugere que a difusão amplifica-se essencialmente para onda s :

$$k \cot \delta_0 \approx -\frac{1 + r_0 \alpha_l}{r_0^2 \alpha_l} \equiv -\frac{1}{a}$$

← comprimento de espalhamento

resultando em secção total: $\sigma = 4\pi a^2$, equivalente à de esfera dura de raio a (mas neste caso temos $a \approx 1/\lambda$ o que é muito superior a r_0). Amplitude de espalhamento pode também ser considerada como função de k complexa, tendo aqui o polo $k_0 = i/a$.

Em presença do estado ligado de onda s , a secção efectiva total está dominada pela respectiva contribuição:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{\cot^2 \delta_0 + 1} = \frac{2\pi \hbar^2 / m}{E - E_0}$$

correspondente a ressonância com estado ligado.

Ressonâncias de baixas energias

Passamos à consideração das energias positivas, um pouco superiores às de escala $\sim |E_0|$, mas ainda baixas em sentido que $kr_0 \ll 1$. Numa secção parcial com $l \neq 0$:

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{1}{\cot^2 \delta_l + 1}$$

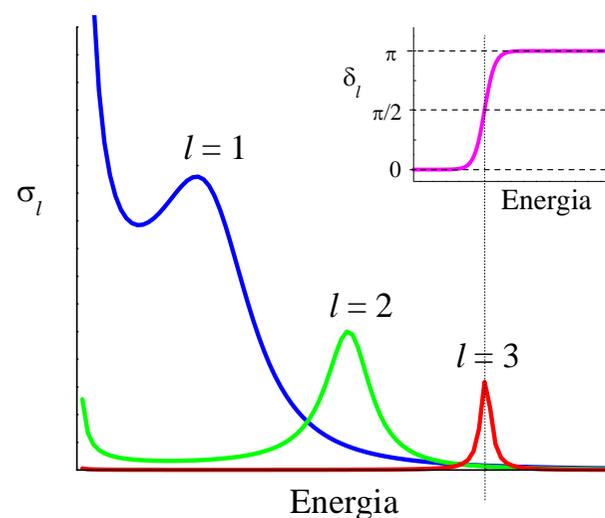
pode aparecer um máximo na vizinhança de certa energia $E_l > 0$ e, como $\alpha_l(E)$ é geralmente complexa para $E > 0$, E_l corresponde à solução para *parte real* de Eq. (N) (se existe tal solução):

$$\sigma_l \approx \frac{4\pi \Gamma_k^2 / k^2}{4(E - E_l)^2 + \Gamma_k^2}, \quad \text{com} \quad \Gamma_k = -\frac{2k(kr_0)^{2l}}{[(2l-1)!!]^2} \left(\frac{\partial \alpha_l}{\partial E} \right)_{E=E_l}^{-1} \quad (\text{B-W})$$

formula de Breit-Wigner

Os máximos de tipo Eq. (B-W) chamam-se as ressonâncias de espalhamento, eles tornam-se mais pronunciados com aumento de número l (e quase não observáveis para $l = 0$). Para energias próximas à ressonância E_l a fase correspondente é:

$$\delta_l \approx \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{E - E_l}{\Gamma_k / 2}$$



passa de zero até π dentro dum estreito intervalo $\sim \Gamma_k$, sendo $\pi/2$ no mesmo ponto de ressonância (veja a inserção na figura). O estado de ressonância pode considerar-se como um estado *quase ligado*, onde partícula passa o tempo

$$\tau \sim \hbar/\Gamma \gg \hbar/E_l,$$

quer dizer, muito superior ao período de oscilação no estado assintótico livre com a mesma energia E_l .

Espalhamento das partículas idênticas

Os argumentos que reduzem o problema de espalhamento das 2 partículas no sistema lab. para difusão de 1 partícula no sistema c.m., devem ser reconsiderados para o caso das partículas idênticas. Neste caso, o contador é incapaz de discernir a partícula incidente da partícula alvo (ao contrário das bolas de bilhar). Portanto a função de onda assintótica deve ser propriamente simetrizada.

2 bosões sem spin

A função de onda está expressa:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{ipR} \psi(\mathbf{r}) \quad \begin{array}{l} \mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2 \\ \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2 \end{array}$$

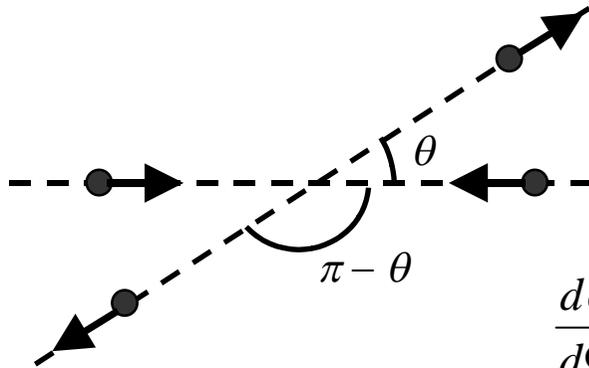
onde a função de movimento relativo (no sistema c.m.):

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) \quad \text{simétrica}$$

Portanto $\psi(\mathbf{r}) = [\psi(\mathbf{r}) + \psi(-\mathbf{r})]/2$, ou, simetrizando a equação para amplitude de difusão:

$$\psi(\mathbf{r}) = \cos \mathbf{k}\mathbf{r} + \frac{f(\theta) + f(\pi - \theta)}{2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$$

$f_s(\theta)$, amplitude simétrica que só contém as contribuições de l par.



A secção diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f_s(\theta)|^2 = \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + 2\text{Re}f^*(\theta)f(\pi - \theta). \end{aligned}$$

Para o caso $\theta = \pi/2$ (onde $f(\theta) = f(\pi - \theta)$) obtemos:

termo de interferência
(não é mesmo que para teorema óptico !)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4|f(\pi/2)|^2$$

dobro comparando com as partículas independentes

Descomposição de amplitude simétrica em amplitudes parciais tem a forma:

$$f_s(\theta) = 2 \sum_{l \text{ pares}} i^l (2l + 1) P_l(\cos \theta) f_l(\theta).$$

2 fermiões com spin $s = 1/2$

Neste caso a função de onda:

$$\psi(1,2) = e^{ipR} \psi(\mathbf{r}) \chi(1,2)$$

pode pertencer ao estado singlet ou triplet. Para o singlet temos:

$$\left. \begin{aligned} \psi_s(\mathbf{r}) &= \psi_s(-\mathbf{r}) \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_s &= |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{igual a} \\ \text{que para} \\ \text{bosões} \end{array}$$

Para o triplet:

$$\psi_t(\mathbf{r}) = -\psi_t(-\mathbf{r})$$

$$f_t(\theta) = f(\theta) - f(\pi - \theta)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_t = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$$

Particularmente,
torna-se impossível
espalhamento com θ
 $= \pi/2$

Descomposição de amplitude antissimétrica $f_t(\theta)$ em amplitudes parciais tem a forma:

$$f_t(\theta) = 2 \sum_{l \text{ ímpares}} i^l (2l + 1) P_l(\cos \theta) f_l(\theta)$$

Para o feixe não polarizado (tanto incidente como alvo) guarda-se equipartição entre 1 estado singlet e 3 estados triplet na saída, assim que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{não pol.}} &= \frac{3}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_t + \frac{1}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_t = \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \text{Re} f^*(\theta) f(\pi - \theta). \end{aligned}$$

Identidade e spin isotópico

Formalismo de isospin permite descrever de maneira natural identidade (ou não identidade) dos nucleões que participam no processo de difusão.

Exemplos. Se para o sistema de 2 nucleões o estado de isospin está definido como singlet:

$$\varphi_s(1,2) = \frac{\psi_p(1)\psi_n(2) - \psi_n(1)\psi_p(2)}{\sqrt{2}}$$

então para que a função inteira de onda deste sistema:

$$\psi(1,2) = \psi^{(s)}(\mathbf{r}, s_1, s_2) \varphi_s(1,2)$$

função
antissimétrica

satisfaz o princípio de Pauli, a função de coordenadas e spins $\psi^{(s)}$ deve ser simétrica.

E para estado de triplet isotópico $\varphi_t(1,2)$:

$$\psi(1,2) = \psi^{(t)}(\mathbf{r}, s_1, s_2) \varphi_t(1,2)$$

simétrica

a parte espacial-spin $\psi^{(t)}$ deve ser antissimétrica.

Doutro lado, o estado de definida composição dos nucleões, por exemplo (p,n) , pode incluir tanto componentes de singlet como de triplet isotópicas e em princípio não tem nenhuma simetria específica. Contudo se conhece que para deuterão pn (sistema ligado de próton e neutrão) o estado de spin é triplet (simétrico) e o de momento angular é misturado entre S e D ($L = 0, 2$, simétrico também), portanto o seu estado de isospin só pode ser singlet (antissimétrico).*

* Existência de qualquer componente de triplet isospin implicava a hipótese da sua “rotação” no espaço das variáveis de carga para estados pp ou nn , impossíveis para estado ligado.

Para bósons isotópicos (como piões) a função inteira $\psi(1,2)$ deve ficar simétrica com respeito à troca simultânea:

$$r_1 \leftrightarrow r_2, \quad s_1 \leftrightarrow s_2, \quad I_1 \leftrightarrow I_2.$$

sempre simétrica

Portanto neste sistema necessariamente guarda-se a correspondência:

$$\ell \text{ par} \rightarrow I \text{ par}, \quad \ell \text{ ímpar} \rightarrow I \text{ ímpar}.$$