Supervisor:

Dirk Hofmann (University of Aveiro, Dep. of Mathematics)

Co-supervisors:

Manuel António Martins (University of Aveiro, Dep. of Mathematics)

José Nuno Oliveira (University of Minho, Dep. Of Computer Science)

External researcher:

Alexander Kurz (University of Leicester, Dep. of Computer Science)

Métricas e Dualidades para semântica de sistemas de transição com pesos

Sumário

Na abordagem moderna à modelação de sistemas computacionais ([vBHMW07,BFJ+11]), os métodos que utilizam dados quantitativos (probabilidades, tempo) têm-se tornado cada vez mais preponderantes e envolvem em muitas circunstâncias o uso de certas mónadas (Vietoris, Distribution) e as categorias de Kleisli associadas. Neste contexto, o conjunto de estados ou as próprias transições são acompanhadas de uma métrica, podendo mesmo a equivalência entre implementações ser estabelecida a menos de um valor. Assim, em contraste com a abordagem clássica, que apenas permite afirmar se dois sistemas são ou não equivalentes, na abordagem quantitativa proposta consegue-se acomodar distância entre estados, ou exprimir com que probabilidade dois estados são equivalentes.

Neste projecto pretendemos integrar várias abordagens numa única teoria utilizando métodos modernos da teoria das categorias e da computação. Procuramos resultados de dualidades entre as categorias de Kleisli e categorias de álgebras com "hemimorfismos" e tencionamos investigar estruturas importantes destas categorias (produtos tensoriais).

Estado da Arte

A teoria de domínios surgiu com a tentativa de Dana Scott em 1972 de encontrar um modelo matemático para o lambda-calculus sem tipos. Mas o contraste entre as necessidades da semântica denotacional e o poder de modelação que a teoria oferece tornou-se bem visível no princípio dos anos oitenta quando de Bakker e Zucker [BZ82] apresentaram um modelo quantitativo de processos concorrentes baseados em espaços métricos. O seu trabalho foi generalizado por America e Rutten [AR89] que consideraram o problema geral de resolver equações recursivas de domínios em categorias de espaços métricos. Desde então têm sido feitos muitos esforços para a unificação de ambas as abordagens.

Em [Wag94] Wagner propôs um contexto para resolver equações de domínios em certas categorias enriquecidas, unificando deste modo as tentativas de Scott e de de Bakker e Zucker [BZ82] que nos anos oitenta pareciam fundamentalmente diferentes. O trabalho de Wagner é baseado no artigo [Law73] onde Lawvere fez a observação fundamental de que, considerando uma generalização natural de categoria, se podem interpretar espaços métricos como categorias. De forma semelhante, em 1970 Barr obteve uma descrição dos espaços topológicos como álgebras relacionais para a mónada dos ultrafiltros, o que permite também interpretar espaços topológicos como categorias. Esta observação motivou uma nova linha de investigação, iniciada em [CT03] e recentemente descrita extensivamente no livro [CCH+13], que tem como objectivo o estudo uniforme de vários objectos de topologia como categorias enriquecidas. Seguindo a perspectiva categorial, [CH09] revelou que vários domínios semânticos podem ser vistos como álgebras para a mónada de "contravariant presheafs". Esta formulação permite investigar conceitos quantitativos correspondentes a domínios clássicos.

A dualidade entre álgebras modais e espaços modais é crucial na lógica modal e tem sido intensamente explorada na investigação de diversos fenómenos nesta

área. As dualidades clássicas de Priestley e Stone têm sido estendidas para categorias de álgebras com operadores ([BKR07]), bem como para semânticas algébricas para variantes de lógicas modais como lógicas híbridas (ver [Lit06,MMDB11]). Seguindo uma ideia de Halmos, estes resultados de dualidade podem ser vistos como restrições de equivalências duais entre categorias de relações contínuas num lado e categorias de "hemimorfismos" (morfismos que preservam apenas parte da estrutura) no outro. Um método geral para a construção deste tipo de dualidades baseada na teoria de mónadas foi recentemente descrito em [HN13]. Analogamente ao caso de domínios, o ponto de vista categorial permite ver a mónada de Vietoris como a mónada de "covariant presheafs", o que dá origem a versões enriquecidas da mónada de Vietoris que podem ser utilizadas para estudar álgebras modais em espaços métricos (ver [Hof12]). Além disso, [Hof12] mostra como a dualidade de Esakia se enquadra naturalmente via "idempotent split completion" neste contexto. Finalmente, em [FJ13] foram estudados vários funtores entre categorias de Kleisli de mónadas relevantes para a modelação de computações probabilísticas e categorias de álgebras C^* e "hemimorfismos". Este trabalho está seguramente relacionado com os trabalhos de Radul ([Rad97], por exemplo) sobre uma representação funcional da mónada de Vietoris.

Objectivos

O objectivo principal desta tese é a investigação de várias mónadas relevantes para a modelação de noções de computação e o desenvolvimento de uma teoria uniforme de dualidades entre as correspondentes categorias de Kleisli e categorias de álgebras apropriadas com "hemimorfismos". Esta teoria deve em particular unificar o caso clássico descrito acima com a "dualidade de Gelfand probabilística" de [FJ13], e fornecer uma ferramenta flexível para a construção de dualidades deste tipo. Além disso, pretende-se investigar as categorias de álgebras destas mónadas e estudar construções fundamentais tais como produtos tensoriais e espaços de funções.

De um ponto de vista mais concreto, uma direcção a explorar é a modelação de "state based software components" recorrendo à teoria de coalgebras. Esta vertente é baseada em trabalho de outros participantes (em particular, Luis Barbosa e José Nuno Oliveira) do projecto "Nasoni" (projecto FCT com o qual o programa de trabalhos está fortemente relacionado) com quais pretendemos desenvolver sinergias na investigação do enquadramento científico dos fundamentos matemáticos nas questões computacionais relacionadas. A ideia fundamental é considerar componentes de um sistema como morfismos na (bi)categoria de Kleisli, tal que a estrutura interna desta categoria (composição, (co)limites, produtos tensoriais, etc) facilite raciocinar sobre o comportamento do sistema.

Descrição detalhada

O trabalho deverá iniciar-se com o estudo do contexto "teoria topológica" [Hof07] e os subsequentes trabalhos [CH09,Hof12] que descrevem vários tipos de espaços como generalizações de categorias enriquecidas num quantale e desenvolvem uma teoria de (co)completude envolvendo as correspondentes mónadas de "presheafs". Tendo em conta que no caso topológico estas mónadas especializam-se para as mónadas de filtros e de Vietoris, o orientando deverá prosseguir investigando as respectivas categorias de Kleisli e as ligações com categorias de álgebras adequadas. Aqui a functorialidade da construção de Kleisli e os resultados de [RW04] sobre "idempotent split completion" e reticulados completamente distributivos podem ser utilizados para obter, de maneira uniforme, resultados de dualidades deste tipo. No caso clássico a dualidade de Stone foi o ponto de partida para a obtenção das dualidades de Priestley, de Esakia e de álgebras modais, e conjecturamos que agora o mesmo papel poderá ser desempenhado pela dualidade de Gelfand (para espaços compactos e de Hausdorff e álgebras C^*). Estamos convencidos que, por exemplo, a teoria topológica de espaços de aproximação (introduzido por R. Lowen em 1989) fornece um ambiente apropriado para estas investigações, em particular esperamos

relacionar a mónada de Vietoris associada a esta teoria (ver [Hof12]) com as mónadas para a modelação de computações probabilísticas apresentadas em [FJ13] aproveitando os resultados de Radul sobre uma representação funcional da mónada de Vietoris.

O orientando deve também familiarizar-se com os trabalhos [Sok11, Oli12] para desenvolver, em colaboração com outros participantes do projecto "Nasoni", a construção de um cálculo de componentes de software modeladas como "monadic Mealy machines" (coalgebras para certos funtores) no caso probabilístico contínuo, considerando componentes de um sistema como morfismos na (bi)categoria de Kleisli. Um outro aspecto desta linha de investigação é a criação de lógicas (semântica e sintaxe) para raciocinar sobre o comportamento do sistema.

[AR89] P. America and J. Rutten, Solving reflexive domain equations in a category of complete metric spaces, *J. Comput. System Sci.*, 39 (1989), 343-375.

[BFJ+11] S. S. Bauer, U. Fahrenberg, L. Juhl, K. G. Larsen, A. Legay, and C. Thrane, Quantitative refinement for weighted modal transition systems, in *Mathematical foundations of computer science 2011*, vol. 6907 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Springer, Heidelberg, 2011, 60-71.

[BKR07] M. M. Bonsangue, A. Kurz, and I. M. Rewitzky, Coalgebraic representations of distributive lattices with operators, *Topology Appl.*, 154 (2007), 778-791.

[CCH+13] M. M. Clementino, E. Colebunders, D. Hofmann, R. Lowen, R. Lucshyn-Wright, G. Seal and W. Tholen, *Monoidal Topology* (Editors: D. Hofmann, G. Seal and W. Tholen), Cambridge Univ. Press (to appear), 2013.

[CH09] M. M. Clementino and D. Hofmann, Relative injectivity as cocompleteness for a class of distributors, *Theory Appl. Categ.*, 21 (2009), , 210-230.

[CT03] M. M. Clementino and W. Tholen, Metric, topology and multicategory--a common approach, *J. Pure Appl. Algebra*, 179 (2003), 13-47.

[BZ82] J. W. de Bakker and J. I. Zucker, Processes and the denotational semantics of concurrency, *Inform. and Control*, 54 (1982), 70-120.

[FJ13] R. Furber and B. Jacobs, From Kleisli categories to commutative C^* -algebras: probabilistic Gelfand duality. In Reiko Heckel and Stefan Milius, editors, *Algebra and Coalgebra in Computer Science*, volume 8089 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 141--157. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[Hof07] D. Hofmann, Topological theories and closed objects, *Adv. Math.*, 215 (2007), 789-824.

[Hof12] D. Hofmann, The enriched Vietoris monad on representable spaces, Technical report, 2012.

[HN13] D Hofmann and P. Nora, Dualities in modal logic from the point of view of triples, Technical report, 2013.

[Law73] F. W. Lawvere, Metric spaces, generalized logic, and closed categories [*Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 43 (1973), 135{166 (1974)], *Repr. Theory Appl. Categ.*, (2002), pp. 1-37. With an author commentary: Enriched categories in the logic of geometry and analysis.

[Lit06] T. Litak, Algebraization of hybrid logic with binders, in *Relations and Kleene algebra in computer science*, vol. 4136 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Springer, Berlin, 2006, 281-295.

[MMDB11] M. A. Martins, A. Madeira, R. Diaconescu, and L. S. Barbosa, Hybridization of institutions, in Algebra and coalgebra in computer science, vol. 6859 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Heidelberg, 2011, 283-297.

[Oli12] J.N. Oliveira, Typed linear algebra for weighted (probabilistic) automata, In CIAA'12, volume 7381 of LNCS, 52-65, 2012.

[Rad97] T. Radul, A functional representation of the hyperspace monad, Commentat. Math. Univ. Carol., 38 (1997), 165-168.

[RW04] R. Rosebrugh and R. J. Wood, Split structures, Theory Appl. Categ., 13 (2004), 172-183.

[Sok11] A. Sokolova, Probabilistic systems coalgebraically: A survey. Theor. Comput. Sci., 412 (2011), 5095-5110.

[vBHMW07] F. van Breugel, C. Hermida, M. Makkai, and J. Worrell, Recursively defined metric spaces without contraction, Theoret. Comput. Sci., 380 (2007), 143-163.

[Wag94] K. R. Wagner, Solving Recursive Domain Equations with Enriched Categories, PhD thesis, Carnegie Mellon University, 1994.